

Contrôle continu N° 2

(Durée : 1h 30 mn)

Les réponses doivent être concises et précises.

Exercice 1. (5 points) Soit $(f_n)_{n \geq 2}$ la suite de fonctions définies sur \mathbb{R}_+ par

$$f_n(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^n}.$$

- 1) Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 2}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers une fonction f que l'on déterminera.
(Indication. Distinguer les cas : $t \in [0, 1[$, $t = 1$ et $t > 1$).
- 2) En déduire que $(f_n)_{n \geq 2}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ et sur \mathbb{R}_+ vers f .
- 3) (i) Soit $n \geq 2$. Justifier l'existence de $\int_0^1 f_n(t) dt$.
(ii) Montrer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, que

$$0 \leq e^{-t} - f_n(t) \leq t^n.$$

- (iii) En utilisant 1) et 3)(ii), montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 1 - \frac{1}{e} = \int_0^1 f(t) dt.$$

Conclure.

Exercice 2. (10 points) Soit Γ la courbe plane paramétrée par la fonction f définie par

$$f(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{t^2 + 1}{2t}, \frac{2t - 1}{t^2} \right) = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2t}, \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \right).$$

- (i) Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de f et les limites aux bornes de \mathcal{D}_f .
- (ii) Etudier les variations de x et de y .
- (iii) Montrer que la courbe Γ admet un point stationnaire. Préciser l'équation de la tangente en ce point et sa nature.
- (iv) Montrer que la courbe Γ possède une asymptote horizontale Δ (au voisinage de l'infini) et préciser sa position par rapport à Γ .
- (v) En calculant $x^2(t)$, montrer l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} [y(t) - (ax^2(t) + bx(t) + c)] = 0.$$

En déduire l'existence d'une parabole P asymptote à la courbe Γ au voisinage de 0. Préciser la position de Γ par rapport à P .

Exercice 3. (5 points) On considère l'équation différentielle

$$(x^2 + 1)y' + xy + y^3 = 0 \quad (1).$$

(i) Quel est le type de l'équation (1) ? Préciser le ou les intervalles de \mathbb{R} sur lesquels (1) admet des solutions.

(ii) Résoudre l'équation (1).

Indication. A l'aide d'une intégration par parties ou bien d'un changement de variable, déterminer les primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2}{(1 + x^2)^2}.$$



ETU SUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..